Exámenes de Selectividad

Física. Madrid 2023, Ordinaria

mentoor.es

Pregunta 1. Opción A. Campo Gravitatorio

Un satélite de la constelación OneWeb®, de 150 kg de masa, se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 1200 km sobre el nivel del mar. Determine:

a) **Las energías potencial gravitatoria y cinética que tiene el satélite en su órbita.**
b) **La energía que fue necesario comunicar al satélite para ponerlo en órbita desde la superficie de la Tierra.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m.

Solución:

a) **Las energías potencial gravitatoria y cinética que tiene el satélite en su órbita.**

La energía potencial gravitatoria se calcula mediante la expresión

$$E_p = -\frac{GMm}{r},$$

donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa de la Tierra, m es la masa del satélite y r es la distancia desde el centro de la Tierra hasta el satélite. Los valores de G, M y m son datos proporcionados en el enunciado, por lo que solo es necesario obtener r, el cual es igual a la suma del radio de la Tierra más la altura del satélite, es decir:

$$r = R_T + h.$$

De esta forma, la expresión para la energía potencial queda:

$$E_p = -\frac{GMm}{R_T + h}.$$

Sustituyendo los valores numéricos, obtenemos:

$$E_p = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 150}{6,37 \cdot 10^6 + 1,2 \cdot 10^6} = -7,89 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

En cuanto a la energía cinética, se usa la fórmula:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

Para calcular la velocidad, recordamos que el satélite está en una órbita circular, por lo que su velocidad será la velocidad orbital, que viene dada por la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula de la energía cinética, obtenemos:

$$E_c = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{R_T + h}.$$

Al sustituir los valores, tenemos:

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 150}{6,37 \cdot 10^6 + 1,2 \cdot 10^6} = 3,95 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Por lo tanto, la energía potencial es $-7,89 \cdot 10^9$ J y la energía cinética es $3,95 \cdot 10^9$ J.

b) La energía que fue necesario comunicar al satélite para ponerlo en órbita desde la superficie de la Tierra.

La energía total que tiene el satélite en órbita es la suma de la energía potencial y la energía cinética que obtuvimos anteriormente, es decir:

$$E_{\text{órbita}} = E_c + E_p = -3,95 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Antes de despegar, el satélite se encontraba en la superficie de la Tierra, por lo que su energía mecánica inicial estaba dada solo por la energía potencial gravitatoria, ya que no se estaba moviendo ($E_c = 0$ J). Así, la energía mecánica antes del despegue era:

$$E_{\text{inicial}} = -\frac{GMm}{R_T} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 150}{6,37 \cdot 10^6} = -9,38 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Por último, la energía que hemos tenido que suministrar al satélite es la diferencia entre la energía en órbita y la energía inicial:

$$\Delta E = E_{\text{órbita}} - E_{\text{inicial}} = -3,95 \cdot 10^9 - (9,38 \cdot 10^9) = 5,44 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Por lo tanto, la energía de satelización es $\mathbf{5,44 \cdot 10^9}$ J.

Pregunta 2. Opción A. Ondas

A lo largo de una cuerda se propaga en el sentido $+x$ una onda transversal. El periodo de oscilación y la elongación máxima de un punto cualquiera de la cuerda son, respectivamente, $4 \cdot 10^{-3}$ s y 3 mm. La distancia mínima entre dos puntos cualesquiera de la cuerda que oscilan en fase es de 0,25 metros. En el instante $2 \cdot 10^{-3}$ s la elongación de un punto situado a $+0,5$ m del origen de coordenadas es de $-1,5$ mm y su velocidad de oscilación en ese instante es positiva.

a) **Halle la frecuencia angular y la velocidad de propagación de la onda.**
b) **Obtenga la expresión matemática que describe a la onda.**

Solución:

a) **Halle la frecuencia angular y la velocidad de propagación de la onda.**

La frecuencia angular ω se puede obtener a partir del periodo T con la fórmula:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Sustituyendo el valor del periodo:

$$\omega = \frac{2\pi}{4 \cdot 10^{-3}} = \frac{\pi}{2} \cdot 10^3 \,\text{rad/s}.$$

Para calcular la velocidad de propagación v, utilizamos la relación entre la velocidad, la longitud de onda λ y el periodo T:

$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

Dado que la distancia mínima entre puntos en fase es la longitud de onda, podemos deducir que $\lambda = 0,25\,\text{m}$. Entonces, la velocidad de propagación es:

$$v = \frac{0,25}{4 \cdot 10^{-3}} = 62,5\,\text{m/s}.$$

Por lo tanto, la frecuencia angular es $\frac{\pi}{2} \cdot 10^3$ rad/s y la velocidad de propagación de la onda es $62,5$ m/s.

b) **Obtenga la expresión matemática que describe a la onda.**

Sabemos que la ecuación general de una onda tiene la forma:

$$y(x,t) = A \sin(\omega t \pm kx + \varphi_0),$$

donde A es la amplitud de la onda, ω es la frecuencia angular (ya obtenida), k es el número de onda y φ_0 es la fase inicial.

La amplitud A ya la conocemos:

$$A = 3\,\text{mm} = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{m}.$$

El número de onda k se calcula como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,25} = 8\pi\,\text{rad/m}.$$

Nótese que como la onda se propaga en el sentido positivo de x, el signo en la ecuación será negativo.

Ahora tenemos la ecuación parcial de la onda:

$$y(x,t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 10^3 t - 8\pi x + \varphi_0\right).$$

Para determinar la fase inicial φ_0, utilizamos el dato de que en el instante $t = 2 \cdot 10^{-3}$ s y para $x = 0,5$ m, la elongación es $y = -1,5\,\text{mm} = -1,5 \cdot 10^{-3}$ m. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la onda:

$$-1,5 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} - 8\pi \cdot 0,5 + \varphi_0\right).$$

Esto simplifica a:

$$-\frac{1}{2} = \sin(\pi - 4\pi + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} = \sin(\pi + \varphi_0).$$

De aquí obtenemos dos posibles soluciones para φ_0:

$$\pi + \varphi_0 = -\frac{\pi}{6} \quad \text{o} \quad \pi + \varphi_0 = \frac{7\pi}{6}.$$

Para determinar cuál de las dos es correcta, utilizamos el dato de que la velocidad en $x = 0,5$ m y $t = 2 \cdot 10^{-3}$ s es positiva. La velocidad de oscilación de la onda está dada por:

$$v(x,t) = A\omega \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Sustituyendo los valores:

$$v(0,5, 2 \cdot 10^3) = 3 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 10^3 \cos(\pi + \varphi_0).$$

Para que la velocidad sea positiva, necesitamos que $\pi + \varphi_0 = -\frac{\pi}{6}$, lo que nos da:

$$\varphi_0 = -\frac{7\pi}{6}.$$

Finalmente, la expresión matemática de la onda es:

$$y(x,t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 10^3 t - 8\pi x - \frac{7\pi}{6}\right) \text{ m}.$$

Por lo tanto, la ecuación de la onda es $\boldsymbol{y(x,t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 10^3 t - 8\pi x - \frac{7\pi}{6}\right)}$ m.

En el caso de haber escogido la expresión del coseno, la ecuación que describiría la onda se obtiene de manera similar. **En ese caso, la expresión matemática de la onda es:**

$$\boldsymbol{y(x,t) = 3 \cdot 10^{-3} \cos\left(500\pi t - 8\pi x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ m.}}$$

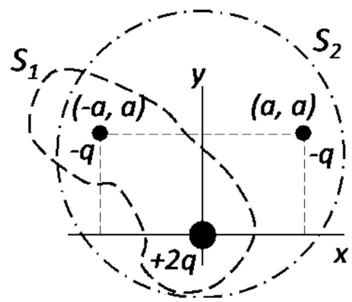
Pregunta 3. Opción A. Campo Electromagnético

Tres cargas $-q$, $-q$ y $+2q$ se encuentran situadas en los puntos del plano $(-a, a)$, (a, a) y $(0, 0)$, respectivamente, tal y como se describe en la figura. Determine, en función de la constante de Coulomb, K, el valor de la carga, q, y la distancia, a:

a) **La expresión de la fuerza electrostática que se ejerce sobre la carga situada en la posición (a, a) y la expresión del trabajo que habrá realizado esa fuerza electrostática para traer la carga $-q$ desde el infinito a la posición (a, a).**

b) **El flujo del campo eléctrico a través de las superficies cerradas S_1 y S_2.**

Dato: Permitividad eléctrica del vacío, $\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi K}$.



Solución:

a) **La expresión de la fuerza electrostática que se ejerce sobre la carga situada en la posición (a, a) y la expresión del trabajo que habrá realizado esa fuerza electrostática para traer la carga $-q$ desde el infinito a la posición (a, a).**

Para determinar la fuerza que actúa sobre la carga $-q$ situada en (a, a), calculamos la fuerza ejercida por cada una de las demás cargas usando la Ley de Coulomb, que viene dada por:

$$F = K\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Vamos a considerar primero la fuerza debida a la carga $-q$ situada en $(-a, a)$. La distancia entre ambas cargas es $2a$, por lo que la fuerza será:

$$F_1 = K\frac{q^2}{(2a)^2} = K\frac{q^2}{4a^2}\,N.$$

Esta fuerza actúa horizontalmente hacia la derecha, ya que ambas cargas son del mismo signo y se repelen. El vector fuerza es entonces:

$$\vec{F}_1 = \frac{Kq^2}{4a^2}\vec{i}\,N.$$

Ahora consideramos la fuerza ejercida por la carga $+2q$ situada en el origen $(0, 0)$. La distancia entre las cargas es $r = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$, y la magnitud de la fuerza es:

$$F_2 = K\frac{2q^2}{(\sqrt{2}a)^2} = K\frac{q^2}{a^2}\,N.$$

Esta fuerza actúa en la dirección del vector $-(a, a)$, que es equivalente a considerar el vector (puesto que son paralelos) $-(1, 1)$ por lo que el vector unitario en esta dirección es:

$$\vec{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\,N.$$

Así, el vector de fuerza es:

$$\vec{F}_2 = K\frac{q^2}{a^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) N.$$

Sumamos las dos fuerzas para obtener la fuerza total:

$$\vec{F} = \frac{Kq^2}{4a^2}\vec{i} + K\frac{q^2}{a^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) = K\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right).$$

El trabajo realizado por la fuerza electrostática para traer la carga $-q$ desde el infinito hasta la posición (a, a) es igual al cambio en la energía potencial electrostática:

$$W_{\infty\to P} = -\Delta E_p = -\left(E_p^{\text{final}} - E_p^{\infty}\right).$$

La energía potencial en el punto (a, a) debido a las otras dos cargas es:

$$E_p^{\text{final}} = K\frac{q^2}{2a} + 2K\frac{q^2}{\sqrt{2}a}\ J.$$

Dado que la energía potencial en el infinito es cero ($E_p^{\infty} = 0$), el trabajo es:

$$W_{\infty\to P} = -\left(\frac{Kq^2}{2a} + 2K\frac{q^2}{a\sqrt{2}}\right) = -K\frac{q^2}{a}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ J.$$

Por lo tanto, la fuerza electróstatica pedida es $K\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right)$ N y el trabajo que habrá realizado esa fuerza electrostática para traer la carga $-q$ desde el infinito a la posición (a, a) es $-K\frac{q^2}{a}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ J.

b) **El flujo del campo eléctrico a través de las superficies cerradas S_1 y S_2.**

Según el teorema de Gauss, el flujo del campo eléctrico a través de una superficie es proporcional a la carga neta encerrada en la superficie. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\Phi = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0},$$

donde $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K}$, por lo que el flujo también puede escribirse en función de K como:

$$\Phi = 4\pi K Q_{\text{enc}}.$$

Para la superficie S_1, la carga contenida es $Q_1 = -q + 2q = q$. Entonces, el flujo es:

$$\Phi_1 = 4\pi K q.$$

Para la superficie S_2, la carga encerrada es $Q_2 = -q - q + 2q = 0$, lo que implica que el flujo es:

$$\Phi_2 = 4\pi K \cdot 0 = 0.$$

El flujo del campo eléctrico a través de la superficie cerrada S_1 es $4\pi Kq$, mientras que a través de S_2 es nulo.

Pregunta 4. Opción A. Óptica

Un objeto de 2 cm de altura se sitúa a 18 cm a la izquierda de una pantalla. Entre la pantalla y el objeto, a 14,2 cm de este, se sitúa una lente convergente.

a) **Determine la distancia focal que debe tener la lente para que se enfoque la imagen del objeto sobre la pantalla y el tamaño de la imagen.**

b) **A continuación, se retira la pantalla y se sitúa a 5 cm a la derecha de la primera lente otra lente convergente de distancia focal 1,2 cm. ¿Dónde se formará la nueva imagen? Realice el correspondiente trazado de rayos.**

Solución:

a) **Determine la distancia focal que debe tener la lente para que se enfoque la imagen del objeto sobre la pantalla y el tamaño de la imagen.**

Primero utilizamos la ecuación de Gauss para las lentes delgadas para determinar la distancia focal necesaria para que la imagen del objeto se enfoque sobre la pantalla. La ecuación es:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s},$$

donde $s = -14,2$ cm es la distancia del objeto a la lente y $s' = 18 - 14,2 = 3,8$ cm es la distancia de la imagen a la lente. Sustituyendo estos valores:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{3,8} - \frac{1}{-14,2} \quad \Rightarrow \quad f' = 3\,\text{cm}.$$

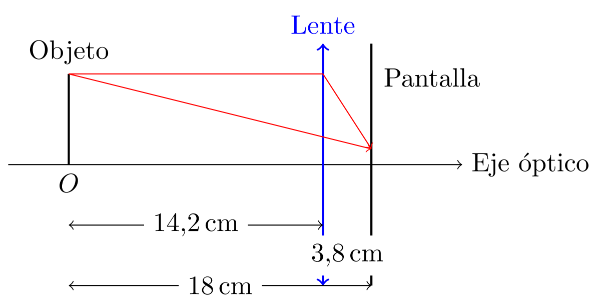
El aumento lateral de la imagen lo obtenemos como:

$$m = \frac{s'}{s} = \frac{3,8}{-14,2} = -0,27.$$

El tamaño de la imagen será:

$$y' = m \cdot y = -0,27 \cdot 2 = -0,54\,\text{cm}.$$

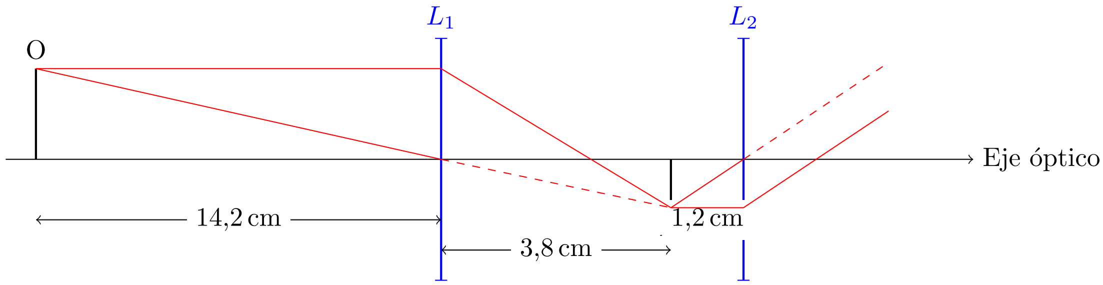
Gráficamente, se tiene la siguiente situación:



Por lo tanto, el tamaño de la imagen es $-0,54$ cm y la distancia focal es -3 cm.

b) **A continuación, se retira la pantalla y se sitúa a 5 cm a la derecha de la primera lente otra lente convergente de distancia focal 1,2 cm. ¿Dónde se formará la nueva imagen? Realice el correspondiente trazado de rayos.**

Ahora, se añade una segunda lente convergente con distancia focal $f_2' = 1,2$ cm, colocada a 5 cm a la derecha de la primera lente. La imagen creada por la primera lente actúa como objeto para la segunda lente:



La posición de la imagen creada por la primera lente es $s'_1 = 3,8$ cm, por lo que la distancia del objeto a la segunda lente es:

$$s_2 = 3,8 - 5 = -1,2\,\text{cm}.$$

Usamos nuevamente la ecuación de las lentes delgadas para la segunda lente:

$$\frac{1}{f'_2} = \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2}.$$

Sustituyendo los valores:

$$\frac{1}{1,2} = \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{-1,2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'_2} = 0,$$

lo que significa que la imagen se forma en el infinito. Esto se debe a que el foco objeto de la segunda lente coincide con la posición de la imagen formada por la primera lente.

Por lo tanto, la nueva imagen se formará en el infinito cuando se coloca la segunda lente a 5 cm de la primera.

Pregunta 5. Opción A. Física Moderna

Se sospecha que un acuífero recibe aportes intermitentes de radón (^{222}Rn). Para comprobarlo, se toman semanalmente medidas de la actividad radiactiva de muestras de agua. Una de esas medidas arroja un valor de 14 Bq para una muestra de un litro. Determine el valor de la medida de la siguiente semana, para otra muestra de un litro, en cada una de las siguientes condiciones:

a) **Si no hubiese ningún aporte de ^{222}Rn en el transcurso de esa semana.**
b) **Si el cuarto día de esa semana la concentración de ^{222}Rn en el acuífero experimentase un aumento súbito de $2 \cdot 10^{-16}$ g por cada litro de agua.**

Datos: Período de semidesintegración del ^{222}Rn, $T_{1/2} = 3,8$ días; Masa atómica del ^{222}Rn, $M_{^{222}\mathrm{Rn}} = 222$ u; Número de Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

Solución:

a) **Si no hubiese ningún aporte de ^{222}Rn en el transcurso de esa semana.**

La actividad radiactiva de una sustancia decae exponencialmente con el tiempo. La expresión para la actividad en función del tiempo es:

$$A(t) = A_0\, e^{-\lambda t},$$

donde $A_0 = 14$ Bq es la actividad inicial de la muestra, $t = 7$ días es el tiempo transcurrido (una semana) y $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{3,8} = 0,1823$ días^{-1} es la constante de desintegración del ^{222}Rn. Sustituyendo estos valores en la fórmula del decaimiento exponencial:

$$A(7) = 14\, e^{-0,1823 \cdot 7} = 14\, e^{-1,2761} = 14 \cdot 0,2795 = 3,91\,\mathrm{Bq}.$$

Por lo tanto, la actividad esperada sin aportes adicionales de ^{222}Rn al cabo de una semana es aproximadamente 3,91 Bq.

b) **Si el cuarto día de esa semana la concentración de ^{222}Rn en el acuífero experimentase un aumento súbito de $2 \cdot 10^{-16}$ g por cada litro de agua.**

El aumento de la concentración de radón en el acuífero ocurre el cuarto día de la semana y produce un aumento súbito de $2 \cdot 10^{-16}$ g por cada litro de agua. Para calcular el aumento en la actividad, primero debemos determinar el número de átomos adicionales de ^{222}Rn, utilizando la relación entre la masa, el número de Avogadro y la masa atómica:

$$N_{\mathrm{Rn}} = \frac{C_{\mathrm{Rn}} \cdot N_A}{M_{\mathrm{Rn}}},$$

donde $C_{\mathrm{Rn}} = 2 \cdot 10^{-16}$ g es el incremento en la concentración de radón, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$ es el número de Avogadro y $M_{\mathrm{Rn}} = 222\,\mathrm{u}$ es la masa atómica del ^{222}Rn, que es equivalente a 222 g/mol. Sustituyendo los valores:

$$N_{\mathrm{Rn}} = \frac{2 \cdot 10^{-16} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{222} = 5,43 \cdot 10^5 \text{ átomos}.$$

La actividad adicional generada por este incremento de átomos es:

$$\Delta A = N_{\mathrm{Rn}} \cdot \lambda = 5,43 \cdot 10^5 \cdot 0,1823 = 0,66\,\mathrm{Bq}.$$

Así, la actividad total al final de la semana, considerando el aporte adicional de radón, será la suma de la actividad esperada sin aportes y la actividad generada por el aumento de concentración:

$$A_{\mathrm{total}} = A(7) + \Delta A = 3,91 + 0,66 = 4,57\,\mathrm{Bq}.$$

Por lo tanto, si hay un aumento súbito en la concentración de radón, la actividad al final de la semana sería de 4,57 Bq.

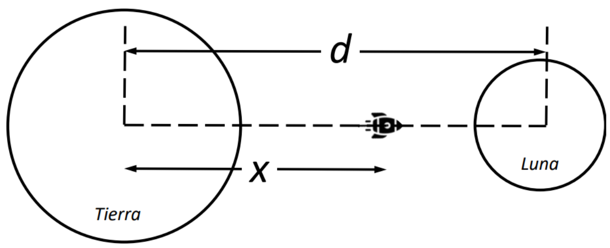
Pregunta 1. Opción B. Campo Gravitatorio

En la película *Space Cowboys* un amenazador satélite militar orbita alrededor de la Tierra a una altura de 1600 km sobre la superficie terrestre.

a) **Calcule la velocidad orbital del satélite y el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra. Desprecie en este apartado la interacción gravitatoria de la Luna.**

b) **Para evitar que el satélite caiga a la Tierra se decide impulsarlo hacia la Luna. Determine la distancia x al centro de la Tierra, tal y como se muestra en la figura, a la que tendrá que llegar el satélite, para que el efecto del campo gravitatorio lunar sea superior al del campo gravitatorio terrestre.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6,37 \cdot 10^3$ km; Masa de la Luna, $M_L = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg; Distancia de la Tierra a la Luna, $d = 3,84 \cdot 10^5$ km.



Solución:

a) **Calcule la velocidad orbital del satélite y el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra. Desprecie en este apartado la interacción gravitatoria de la Luna.**

La velocidad orbital de un satélite en órbita circular se calcula mediante la fórmula:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}},$$

donde $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\ m^2kg^{-2}}$ es la constante de gravitación universal, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ es la masa de la Tierra, $R_T = 6,37 \cdot 10^3\,\mathrm{km} = 6,37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ es el radio de la Tierra y $h = 1600\,\mathrm{km} = 1,6 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ es la altura del satélite sobre la superficie terrestre. Sustituyendo los valores:

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 1,6 \cdot 10^6}} = \sqrt{\frac{3,98 \cdot 10^{14}}{7,97 \cdot 10^6}} = 7,07 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s} = 7,07\,\mathrm{km/s}.$$

Para calcular el tiempo que tarda en completar una órbita (período orbital), utilizamos la siguiente expresión:

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v}.$$

Sustituyendo los valores:

$$T = \frac{2\pi(6,37 \cdot 10^6 + 1,6 \cdot 10^6)}{7,07 \cdot 10^3} = \frac{2\pi \cdot 7,97 \cdot 10^6}{7,07 \cdot 10^3} = 7083\,\mathrm{s} = 1,97\,\mathrm{h}.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital del satélite es aproximadamente 7,07 km/s y el período orbital del satélite es de aproximadamente 7083 segundos, lo que equivale a 1,97 horas.

b) Para evitar que el satélite caiga a la Tierra se decide impulsarlo hacia la Luna. Determine la distancia x al centro de la Tierra, tal y como se muestra en la figura, a la que tendrá que llegar el satélite, para que el efecto del campo gravitatorio lunar sea superior al del campo gravitatorio terrestre.

Para que las fuerzas gravitatorias de la Tierra y la Luna se igualen, la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre el satélite debe ser igual a la fuerza gravitatoria ejercida por la Luna, es decir:

$$\frac{GM_T m}{x^2} = \frac{GM_L m}{(d-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_T}{x^2} = \frac{M_L}{(d-x)^2}$$

donde $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$ es la masa de la Tierra, $M_L = 7,35 \cdot 10^{22}\,\text{kg}$ es la masa de la Luna, $d = 3,84 \cdot 10^5\,\text{km} = 3,84 \cdot 10^8\,\text{m}$ es la distancia entre la Tierra y la Luna y x es la distancia desde el centro de la Tierra hasta el punto en el que la gravedad de la Luna iguala la gravedad de la Tierra. Despejamos x en la ecuación anterior:

$$\frac{M_T}{M_L} = \frac{(d-x)^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{M_T}{M_L}} = \frac{d-x}{x} \quad \Rightarrow \quad x\left(\sqrt{\frac{M_T}{M_L}}+1\right) = d \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_T}{M_L}}+1}.$$

Sustituyendo los valores de M_T, M_L y d:

$$x = \frac{3,84 \cdot 10^5}{\sqrt{\frac{5,97\cdot 10^{24}}{7,35\cdot 10^{22}}}+1} = 3,84 \cdot 10^4\,\text{km}.$$

Por lo tanto, la distancia x desde el centro de la Tierra, en la que la atracción gravitatoria de la Luna iguala a la de la Tierra, es de 38,4 mil km.

Pregunta 2. Opción B. Ondas

Un observador que se encuentra a 3 m de una fuente puntual sonora que emite en todas direcciones mide un nivel de intensidad sonora de 53 dB. Halle:

a) **La intensidad sonora recibida por el observador y la potencia con la que emite la fuente puntual.**
b) **La distancia a la que debe situarse el observador para que el nivel de intensidad sonora percibido se reduzca a una cuarta parte.**

Dato: Intensidad umbral, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Solución:

a) **La intensidad sonora recibida por el observador y la potencia con la que emite la fuente puntual.**

La relación entre la intensidad sonora (I) y el nivel de intensidad sonora (β) en decibelios está dada por la fórmula:

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \Rightarrow \quad I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}.$$

Sustituyendo los valores dados:

$$I = 10^{-12} \cdot 10^{53/10} = 1,99 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Para calcular la potencia emitida por la fuente, utilizamos la relación entre la intensidad y la potencia para una fuente puntual que emite en todas direcciones (esféricamente):

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad P = I \cdot 4\pi r^2,$$

donde $I = 1,99 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}$ es la intensidad sonora y $r = 3\,\mathrm{m}$ es la distancia del observador a la fuente. Sustituyendo los valores:

$$P = 1,99 \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 3^2 = 2,25 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{W}.$$

Por lo tanto, la intensidad sonora recibida por el observador es de aproximadamente $1,99 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}$ y la potencia emitida por la fuente es de aproximadamente $2,25 \cdot 10^{-5}$ W.

b) **La distancia a la que debe situarse el observador para que el nivel de intensidad sonora percibido se reduzca a una cuarta parte.**

Primero, determinamos la intensidad sonora que corresponde a una cuarta parte del nivel de intensidad sonora de 53 dB. Recordemos que el nivel de intensidad sonora en decibelios se relaciona logarítmicamente con la intensidad:

$$\beta' = \frac{\beta}{4} \quad \Rightarrow \quad \beta' = \frac{53}{4} = 13,25\,\mathrm{dB}.$$

Ahora, calculamos la nueva intensidad sonora I' utilizando la fórmula de intensidad en función del nivel de intensidad sonora:

$$I' = I_0 \cdot 10^{\beta'/10} \quad \Rightarrow \quad I' = 10^{-12} \cdot 10^{13,25/10} = 2,11 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{W/m^2}.$$

La nueva intensidad sonora que corresponde a una cuarta parte del nivel de intensidad sonora original es aproximadamente $2,11 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{W/m^2}$. Ahora bien, para encontrar la distancia r' a la que el observador debe situarse para que se perciba esta nueva intensidad, utilizamos nuevamente la relación entre la intensidad y la potencia:

$$I' = \frac{P}{4\pi r'^2} \quad \Rightarrow \quad r' = \sqrt{\frac{P}{4\pi I'}} \quad \Rightarrow \quad r' = \sqrt{\frac{2,25 \cdot 10^{-5}}{4\pi \cdot 2,11 \cdot 10^{-11}}} = 291,3\,\mathrm{m}.$$

Por lo tanto, la distancia r' a la que el observador debe situarse para que el nivel de intensidad sonora percibido se reduzca a una cuarta parte es de aproximadamente 291,3 m.

Pregunta 3. Opción B. Campo Electromagnético

Un ion de He$^+$ se sitúa inicialmente en reposo dentro de una región del espacio donde existe un campo eléctrico homogéneo de 10^3 V m^{-1} que está dirigido a lo largo del eje +x.

a) **Calcule la aceleración que experimenta el ion en el instante inicial.**
b) **Determine la fuerza total sobre el ion si a los 20 µs de ser depositado se aplica un campo magnético homogéneo de 0,6 T a lo largo del eje +y.**

Datos: Masa atómica del ion de He$^+$, $M_{He} = 4\,u$; Número de Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$; Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

a) **Calcule la aceleración que experimenta el ion en el instante inicial.**

Sabemos que una carga en un campo eléctrico experimenta una fuerza dada por:

$$F = qE.$$

Por otro lado, según la Segunda Ley de Newton, la fuerza sobre un cuerpo también se relaciona con la aceleración:

$$F = ma.$$

Igualando las dos expresiones, obtenemos la aceleración:

$$qE = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{qE}{m}.$$

Sabemos que la carga del ion de helio es igual a la carga del electrón, $q = e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, y que la masa de un ion de helio puede calcularse a partir de la masa molar del helio (4 u) dividiendo entre el número de Avogadro:

$$m = \frac{4\,\mathrm{u}}{N_A} = \frac{4}{6,02 \cdot 10^{23}}\,\mathrm{g} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}}\,\mathrm{kg} = 6,64 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}.$$

Sustituyendo los valores:

$$a = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3}{6,64 \cdot 10^{-27}} = 2,41 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Por lo tanto, la aceleración que experimenta el ion es de aproximadamente $2,41 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m/s^2}$, y está dirigida a lo largo del eje +x, paralela al campo eléctrico.

b) **Determine la fuerza total sobre el ion si a los 20 µs de ser depositado se aplica un campo magnético homogéneo de 0,6 T a lo largo del eje +y.**

Después de 20 μs, el ion ha adquirido una velocidad dada por la aceleración anterior. Usamos la ecuación de la cinemática:

$$v = at.$$

Sustituyendo los valores de la aceleración y el tiempo ($t = 2 \cdot 10^{-6}$ s):

$$v = 2,41 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 4,82 \cdot 10^4\,\mathrm{m/s}.$$

Entonces, la velocidad del ion es de aproximadamente $4,82 \cdot 10^4$ m/s, y está dirigida a lo largo del eje +x. El ion ahora se mueve dentro de un campo magnético y, según la Ley de Lorentz, la fuerza total sobre la partícula viene dada por:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

En este caso, el campo eléctrico es $\vec{E} = 10^3\vec{i}$ V/m, la velocidad es $\vec{v} = 4,82 \cdot 10^4\vec{i}$ m/s, y el campo magnético es $\vec{B} = 0,6\vec{j}$ T.
Primero calculamos la contribución del término eléctrico, que es simplemente:

$$\vec{F}_E = q\vec{E} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3\vec{i} = 1,6 \cdot 10^{-16}\vec{i} \text{ N}.$$

Ahora calculamos el término magnético, usando el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Dado que $\vec{v} = 4,82 \cdot 10^4\vec{i}$ y $\vec{B} = 0,6\vec{j}$, el producto vectorial resulta en una dirección en el eje +z:

$$\vec{v} \times \vec{B} = (4,82 \cdot 10^4\vec{i}) \times (0,6\vec{j}) = 4,82 \cdot 10^4 \cdot 0,6\vec{k} = 2,89 \cdot 10^4\vec{k}.$$

Entonces,

$$\vec{F}_B = q(2,89 \cdot 10^4\vec{k}) = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,89 \cdot 10^4\vec{k} = 4,62 \cdot 10^{-15}\vec{k} \text{ N}.$$

Finalmente, sumamos las dos contribuciones para obtener la fuerza total:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = (1,6 \cdot 10^{-16}\vec{i}) + (4,62 \cdot 10^{-15}\vec{k}) = (1,6 \cdot 10^{-16}\vec{i} + 4,62 \cdot 10^{-15}\vec{k}) \text{ N}.$$

Por lo tanto, la fuerza total tiene una componente en el eje x de $1,6 \cdot 10^{-16}$ N y una componente en el eje z de $4,62 \cdot 10^{-15}$ N.

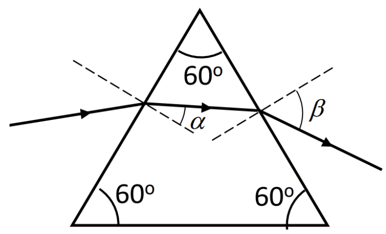
Pregunta 4. Opción B. Ondas

Un rayo de luz incide sobre la cara izquierda del prisma de la figura, el cual está construido con un material cuyo índice de refracción vale 1,66.

a) **Determine los ángulos α y β de la trayectoria que sigue el rayo de luz que entra en el prisma desde el aire con un ángulo de incidencia de 50º.**

b) **Calcule el ángulo límite con el que deberá incidir desde el aire el rayo de luz para que este no emerja del prisma.**

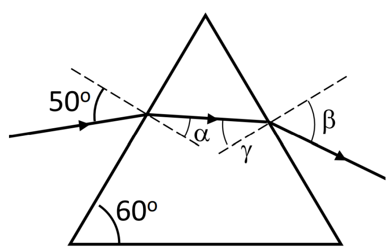
Dato: Índice de refracción del aire, $n = 1$.



Solución:

a) **Determine los ángulos α y β de la trayectoria que sigue el rayo de luz que entra en el prisma desde el aire con un ángulo de incidencia de 50º.**

Representemos en primer lugar todos los ángulos implicados en esta primera parte del ejercicio:



Aplicamos la Ley de Snell en la cara de entrada del prisma:

$$n_0 \sin \alpha_0 = n \sin \alpha.$$

Sustituyendo los valores dados, donde $n_0 = 1$ (índice de refracción del aire), $\alpha_0 = 50°$, y $n = 1,66$ (índice de refracción del prisma):

$$1 \cdot \sin(50°) = 1,66 \cdot \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{\sin(50°)}{1,66} \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) = 0,461 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 27,48°.$$

Ahora, para calcular el ángulo β, utilizamos la geometría del prisma. Sabemos que el ángulo entre las caras del prisma es:

$$\gamma = 60° - \alpha = 60° - 27,48° = 32,52°.$$

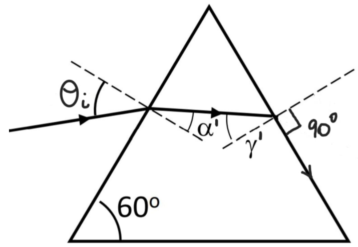
Aplicando la Ley de Snell en la cara de salida del haz de luz:

$$n \sin \alpha = n_0 \sin \beta \quad \Rightarrow \quad 1,66 \cdot \sin(32,52°) = 1 \cdot \sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad \sin(\beta) = 0,892 \quad \Rightarrow \quad \beta = 63,18°.$$

Por lo tanto, los ángulos son $\alpha = 27,48°$ y $\beta = 63,18°$.

b) Calcule el ángulo límite con el que deberá incidir desde el aire el rayo de luz para que este no emerja del prisma.

La situación es ahora:



El rayo de luz no emergerá del prisma cuando el ángulo de refracción β sea igual a 90°. Aplicamos la Ley de Snell para este caso:

$$n\sin(\gamma') = n_0\sin(90°) \Rightarrow 1,66\cdot\sin(\gamma') = 1\cdot\sin(90°) \quad \Rightarrow \quad \sin(\gamma') = \frac{1}{1,66} = 0,602 \quad \Rightarrow \quad \gamma' = 37,04°.$$

Además, se observa en el dibujo que $\alpha' = 60° - \gamma' = 60° - 37,04° = 22,96°$. Finalmente, aplicando la Ley de Snell a la cara de entrada del prisma, podemos calcular el ángulo de incidencia θ_i necesario para que el rayo no emerja:

$$n_0\sin(\theta_i) = n\sin(\alpha') \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta_i) = 1,66\cdot\sin(22,96°) = 0,648 \quad \Rightarrow \quad \theta_i = 40,39°.$$

Por lo tanto, el ángulo límite es $\mathbf{40,39°}$.

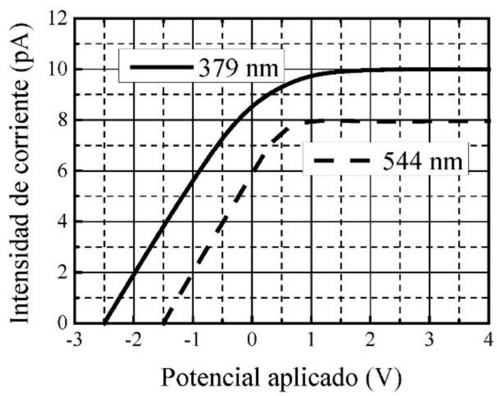
Pregunta 5. Opción B. Física Moderna

Para estudiar el efecto fotoeléctrico se registra la intensidad de corriente entre un cierto metal emisor de fotoelectrones y una placa en función del potencial eléctrico aplicado entre ambos, mientras se ilumina el metal fotoemisor con un cierto haz de luz. La gráfica adjunta muestra los datos para luz de 379 nm y 544 nm, donde se observan potenciales de frenado de 2,5 V y de 1,5 V, respectivamente.

a) **A partir de los potenciales de frenado, obtenga el valor de la constante de Planck.**

b) **Indique cuáles serían los valores del potencial de frenado y de la intensidad de corriente máxima para el haz de luz de 379 nm si se disminuyese a la mitad la intensidad del haz.**

Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3{\cdot}10^{8}$ m s^{-1}; Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6{\cdot}10^{-19}$ C.



Solución:

a) **A partir de los potenciales de frenado, obtenga el valor de la constante de Planck.**

Para calcular la constante de Planck en esta situación, debemos basarnos en el efecto fotoeléctrico:

$$\frac{h \cdot c}{\lambda_1} = W_{\text{ext}} + e \cdot \phi_1 \quad \text{y} \quad \frac{h \cdot c}{\lambda_2} = W_{\text{ext}} + e \cdot \phi_2.$$

Dado que el trabajo de extracción es desconocido, pero por definición debe ser el mismo en ambos casos debido a que no se modifica el material, es posible restar las ecuaciones para eliminar esta variable:

$$hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = e \cdot (\phi_1 - \phi_2) \quad \Rightarrow \quad h = \frac{e \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\phi_1 - \phi_2)}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Sustituyendo los valores:

$$h = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 379 \cdot 10^{-9} \cdot 544 \cdot 10^{-9} \cdot (2.5 - 1.5)}{(3 \cdot 10^{8}) \cdot (544 \cdot 10^{-9} - 379 \cdot 10^{-9})} = 6.66 \cdot 10^{34}\, J \cdot s.$$

Por lo tanto, el valor de la constante de Planck es $\boldsymbol{6.66 \cdot 10^{34}\, J \cdot s}$.

b) **Indique cuáles serían los valores del potencial de frenado y de la intensidad de corriente máxima para el haz de luz de 379 nm si se disminuyese a la mitad la intensidad del haz.**

El potencial de frenado solo depende de la energía de los fotones incidentes y del trabajo de extracción. Entonces, si se disminuye a la mitad la intensidad de luz de 379 nm, el potencial de frenado no cambia,

ya que sigue siendo de 2.5 V (esto se debe a que solo depende de la frecuencia de la luz y del trabajo de extracción del metal).
Si reducimos la intensidad a la mitad, el número de fotones incidentes también se reduce a la mitad, pero la longitud de onda y la energía de cada uno de ellos no varían. Así, el potencial de frenado permanece constante y no se ve afectado por una variación en la intensidad del haz de fotones incidentes.
Por otro lado, la intensidad de corriente sí se vería afectada; al tener la mitad de fotones, las interacciones también se reducirán a la mitad. Esto implica que habría la mitad de fotoelectrones generados por el efecto fotoeléctrico, suponiendo una eficiencia del 100%. Entonces, la intensidad de corriente registrada disminuiría a la mitad, alcanzando un valor máximo de 5 pA.

Por lo tanto, el potencial de frenado no cambia y la intensidad de corriente registrada disminuiría a la mitad, alcanzando un valor máximo de 5 pA.